

**MIA – Präsenzaufgaben Nr. 9**  
**10.1. –12.1.2007**

1. Setze  $f(x) := 1$  für  $x \in \mathbb{Q}, x > \sqrt{3}$ , und  $f(x) := 0$  für  $x \in \mathbb{Q}, x < \sqrt{3}$ . In welchen Punkten ist  $f$  stetig?

2. Beweise oder widerlege für eine stetige Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ : Es sei  $f(a) \neq 0$  für  $a \in D$ . Dann gibt es  $r > 0$ , so dass für alle  $x \in D, |x - a| < r$  gilt:  $f(x) \neq 0$ .

3. Haben die folgenden Funktionen eine stetige Fortsetzung nach  $] - 1, 1[$ ?

1°  $f(x) := 1 - |x|, 0 < |x| < 1.$

2°  $g(x) := \frac{1}{x} \sin x, 0 < |x| < 1.$

3°  $h(x) := \frac{1}{x} \cos x, 0 < |x| < 1.$

4. In welchen Punkten  $a \in \mathbb{R}$  existiert  $\lim_{x \rightarrow a} (x - [x])x$ ?

5. Gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} a \left[ \frac{1}{a} \right] = 1 ?$$

Gilt

$$\lim_{a \rightarrow 0} \sqrt{a \left[ \frac{1}{a} \right]} = 1 ?$$

6. Man zeige: Die Funktion  $f(x) = \sqrt{x}, x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ , ist gleichmäßig stetig in  $[0, \infty[$ , aber nicht lipschitzstetig.

7. Hat die Funktion

$$f(x) := \frac{4x^2 + x}{x^3 + 4x + 1}, x \in [1, \infty[ =: D$$

ein Minimum in  $D$ , bzw. ein Maximum in  $D$ ?